

数 学 問 題

(試験時間 15 : 10 ~ 16 : 30)

受験についての注意

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはならない。
 2. この問題冊子は 6 ページある。
 3. 試験中に問題冊子のページの脱落等に気付いた場合は、手をあげて監督者に知らせること。
 4. 解答用紙に受験番号を記入し、マーク欄にマークすること。また、氏名とふりがなを記入すること。
 5. 解答はすべて解答用紙にマークすること。解答用紙を折り曲げたり、破ったり、汚したりしないこと。
 6. 解答用紙への記入には必ず HB の黒鉛筆を用いること。シャープペンシルなど他の筆記用具を用いると、正確に読み取れない場合がある。
 7. 解答にあたっては、解答用紙の該当する箇所を
右に示す例に従ってぬりつぶすこと。
例えば 2 にマークするときは、次のように
①●③とする。
- | 例 | |
|---|-------|
| 良 | 不良 |
| ● | ● ⊗ ⊙ |
8. 一度記入したマークを消す場合には、消しゴムできれいに消すこと。
×をつけても消したことはない。また消しゴムのくずを完全に除去しておくこと。
 9. 解答用紙の指定された場所以外には何も書いてはならない。
 10. 選択問題④と⑤はどちらか一方を選択してマーク欄にマークし、選択した方の問題を解答すること
 11. 計算には問題冊子の余白あるいは別に配布する計算用紙(白紙)を使用すること。
 12. 計算機を使用してはならない。
 13. 携帯電話の電源は切っておくこと。身につけたり机の上に置いたりしてはならない。
 14. この問題冊子は試験終了後持ち帰ること。

(数 学)

- 1 以下の空欄 $\square{\text{ア}}$ ~ $\square{\text{ウ}}$ にあてはまるものを選択肢から選び、番号をマークしなさい。また空欄 $\square{\text{エ}}$ ~ $\square{\text{シ}}$ に入る数字をそれぞれ解答欄にマークしなさい。ただし分数はすべて既約分数とし、 $\square{\text{エ}}$ には該当する最も大きな数字を入れなさい。

問1 自然数全体の集合を U とし、 U の部分集合 A, B, C を以下のように定める。

$$A = \{n \mid n \text{ は } 2 \text{ で割ると } 1 \text{ 余る数}\}$$

$$B = \{n \mid n \text{ は } 3 \text{ で割ると } 1 \text{ 余る数}\}$$

$$C = \{n \mid n \text{ は } 6 \text{ で割ると } 1 \text{ 余る数}\}$$

このとき、

$$n \in A \text{ は } n \in B \text{ であるための } \square{\text{ア}}.$$

$$n \in A \text{ は } n \in C \text{ であるための } \square{\text{イ}}.$$

$$n \in A \cap B \text{ は } n \in C \text{ であるための } \square{\text{ウ}}.$$

$\square{\text{ア}}$ ~ $\square{\text{ウ}}$ の選択肢：

- ① 必要十分条件である
- ② 必要条件であるが、十分条件ではない
- ③ 十分条件であるが、必要条件ではない
- ④ 必要条件でも十分条件でもない

問2 $a_n = \frac{1}{(n+1)!}$, $S_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k = \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$ ($n \geq 2$) とする。数列 $\{a_n\}$

に対し、数列 $\{b_n\}$ は $b_1 = a_1 = \frac{1}{2!}$ かつ $b_n > a_n$ ($n = 2, 3, \dots$) を満たす等比数列とする。

$$\text{いま } 3! = 3 \times 2!, 4! = 4 \times 3 \times 2! > \square{\text{エ}}^2 \times 2!, 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2! > \square{\text{エ}}^3 \times 2!, \dots$$

と考えると、 $\{b_n\}$ の公比を $\frac{1}{\square{\text{エ}}}$ にとることができる。このとき

$$S_n < \sum_{k=1}^{n-1} b_k = \frac{\square{\text{オ}}}{\square{\text{カ}}} \left(1 - \frac{1}{\square{\text{エ}}^{n-\square{\text{キ}}}} \right) \text{ が成り立つ。一方 } \{S_n\} \text{ は増加数列で}$$

$$S_4 = \frac{\square{\text{クケ}}}{\square{\text{コサ}}} \text{ だから、} n > 4 \text{ のとき } S_n > \frac{\square{\text{クケ}}}{\square{\text{コサ}}} \text{ が成り立つ。以上より } n > 4 \text{ のとき}$$

$$\frac{\square{\text{クケ}}}{\square{\text{コサ}}} < S_n < \frac{\square{\text{オ}}}{\square{\text{カ}}} \left(1 - \frac{1}{\square{\text{エ}}^{n-\square{\text{キ}}}} \right) \text{ となり、} S_n \text{ の値を小数第 } 1 \text{ 位まで求めると、}$$

0. $\square{\text{シ}}$ となる。

(数 学)

2 1 辺の長さが 1 の正四面体 OABC がある。以下の空欄 [ア] ~ [ソ] に入る数字をそれぞれ解答欄にマークしなさい。なお分数はすべて既約分数とする。

問 1 頂点 B から面 OAC に下ろした垂線の足を H とすると、

$$\vec{OH} = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}} \vec{OA} + \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}} \vec{OC} \text{ である。}$$

問 2 面 OAC に関して、点 B と対称な点を P とすると、

$$\vec{OP} = \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}} \vec{OA} - \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ケ}}} \vec{OB} + \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}} \vec{OC} \text{ である。}$$

問 3 $(\vec{QA} + 2\vec{QB}) \cdot \vec{QB} = 0$ を満たす点 Q は、ある球面上に存在する。この球の

中心を R とするとき、 $\vec{OR} = \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}} \vec{OA} + \frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}} \vec{OB}$ であり、球の半径は $\frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ である。

(数 学)

3 数列 $\{a_n\}$ を次のように定める.

$$a_1 = 0, a_2 = 1, a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

また数列 $\{b_n\}$ を次のように定める.

$$b_n = \cos\left(\frac{2}{3} a_n \pi\right) + i \sin\left(\frac{2}{3} a_n \pi\right) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

ただし $i^2 = -1$ である. 以下の空欄 $\boxed{\text{ア}} \sim \boxed{\text{ウ}}$, $\boxed{\text{カ}} \sim \boxed{\text{キ}}$ に入る数値を選択肢から選び, 番号をマークしなさい (同じものを 2 回以上使用してもよい). また空欄 $\boxed{\text{エ}}$ と $\boxed{\text{オ}}$ に入る数字をマークしなさい.

問 1 $b_2 + b_3 = \boxed{\text{ア}}$, $b_1 b_2 b_3 = \boxed{\text{イ}}$, $\frac{1}{b_2} + \frac{1}{b_3} = \boxed{\text{ウ}}$ である.

問 2 方程式 $x^3 - 27 = 0$ の解は, $x = 3, \boxed{\text{エ}} b_2, \boxed{\text{オ}} b_3$ である.

問 3 $S_n = \sum_{k=1}^n b_k$ とすると $S_6 = \boxed{\text{カ}}$, $S_{50} = \boxed{\text{キ}}$ である.

$\boxed{\text{ア}} \sim \boxed{\text{ウ}}$, $\boxed{\text{カ}} \sim \boxed{\text{キ}}$ の選択肢:

① 0	② 1	③ -1	④ $\frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$	⑤ $\frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$
⑥ $\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$	⑦ $\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$	⑧ $\frac{-\sqrt{3} + i}{2}$	⑨ $\frac{-\sqrt{3} - i}{2}$	

(数 学)

選択問題 (4 か 5 の, いずれか1問を選んで解答しなさい. 解答シートに選んだ問題の番号をマークしなさい.)

4 次の空欄 ア ~ タ にあてはまる数字をマークしなさい. 分数はすべて既約分数とする.

問1 a, b を定数とする. 3次関数 $y = x^3 + ax^2 + bx$ において, $x = X + p$,

$$y = Y + q \text{ とおくと, } Y = X^3 - cX \text{ になる. このとき } p = -\frac{a}{\text{ア}},$$

$$q = \frac{2a^3 - \text{イ}ab}{\text{ウエ}}, \quad c = \frac{\text{オ}}{\text{カ}} a^2 - \text{キ} b \text{ である.}$$

問2 c, d は定数で, $c > 0$ とする. x に関する方程式 $x^3 - cx - d = 0$ が相異なる

$$3 \text{ つの実数解をもつとき, } -\frac{\text{ク}\sqrt{3}}{\text{ケ}} c^{\frac{\text{コ}}{\text{サ}}} < d < \frac{\text{ク}\sqrt{3}}{\text{ケ}} c^{\frac{\text{コ}}{\text{サ}}} \text{ である.}$$

問3 k, l は定数で, $k > 0$ とする. x に関する方程式 $x^3 + \sqrt{15} kx^2 + k^2x - l = 0$ が相異なる3つの実数解をもつとき,

$$-\frac{\text{シス}\sqrt{3} + \text{セ}\sqrt{15}}{\text{ソ}} k^{\text{タ}} < l < \frac{\text{シス}\sqrt{3} + \text{セ}\sqrt{15}}{\text{ソ}} k^{\text{タ}} \text{ である.}$$

(数 学)

5 以下の空欄 [ア] ~ [カ] のうち, [ウ], [オ], [カ] には選択肢の中から最も適切なものを選び, 番号をマークしなさい. 他の空欄には, それぞれ入る数字を解答欄にマークしなさい.

問1 関数 $y = \frac{2x}{x^2+1}$ は, $x = -$ [ア] で極小, $x =$ [イ] で極大となり, そのグラフ

は [ウ] に関して対称である.

[ウ] の選択肢:

- ① x 軸, ② y 軸, ③ 原点

問2 $\int_0^2 \frac{2x}{x^2+1} dx = \log$ [エ] である.

問3 c, d の両方がともに0であることはなく, g, h の両方がともに0であること

はないとする. $F(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, $G(x) = \frac{ex+f}{gx+h}$ のとき, $F(G(x)) =$ [オ] である.

[オ] の選択肢:

- ① $\frac{(ae+bf)x+ag+bh}{(ce+df)x+cg+dh}$ ② $\frac{(ae+bf)x+ce+df}{(ag+bh)x+cg+dh}$ ③ $\frac{(ae+bg)x+ce+dg}{(af+bh)x+cf+dh}$
④ $\frac{(ae+bg)x+af+bh}{(ce+dg)x+cf+dh}$ ⑤ $\frac{(ae+cf)x+ag+ch}{(be+df)x+bg+dh}$ ⑥ $\frac{(ae+cf)x+be+df}{(ag+ch)x+bg+dh}$
⑦ $\frac{(ae+cg)x+af+ch}{(be+dg)x+bf+dh}$ ⑧ $\frac{(ae+cg)x+be+dg}{(af+ch)x+bf+dh}$

問4 $f(x) = \frac{x \cos 10^\circ - \sin 10^\circ}{x \sin 10^\circ + \cos 10^\circ}$ とすると, $f(f(f(x))) =$ [カ] である.

[カ] の選択肢:

- ① $\frac{x+\sqrt{3}}{\sqrt{3}x-1}$ ② $\frac{x+\sqrt{3}}{-\sqrt{3}x+1}$ ③ $\frac{x-\sqrt{3}}{\sqrt{3}x+1}$ ④ $\frac{x-\sqrt{3}}{-\sqrt{3}x-1}$
⑤ $\frac{\sqrt{3}x+1}{x-\sqrt{3}}$ ⑥ $\frac{\sqrt{3}x+1}{-x+\sqrt{3}}$ ⑦ $\frac{\sqrt{3}x-1}{x+\sqrt{3}}$ ⑧ $\frac{\sqrt{3}x-1}{-x-\sqrt{3}}$

