

数 学 問 題

(この問題は5題からなっている)

受験についての注意

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはならない。
2. 解答用紙への記入には、必ず**HBの黒鉛筆**を使用しなさい。
3. 解答用紙を折り曲げたり、破いたり、汚したりしてはならない。採点が不可能になる。
4. 合図があったら、解答用紙の左上部の空欄に**受験番号**を記入しなさい。
5. 試験中にページの脱落等に気づいた場合は、手をあげて監督者に知らせなさい。解答用紙の汚れ等に気づいた場合も、同様に知らせなさい。
6. 解答は解答用紙の指定された場所に記入し、その他の部分には何も書いてはならない。裏面にも何も書いてはならない。
7. 解答にあたっては、マークすることを要求された欄をマーク例に従ってぬりつぶしなさい。
8. 一度記入したマークを消す場合には、消しゴムできれいに消さねばならない。×をつけても消したことにはならない。
9. 計算や下書きは、問題冊子の余白を利用しなさい。
10. 計算機を使用してはならない。また、携帯電話やスマートフォンなどの通信機器は、必ず電源を切って鞆の中にしまいなさい。
11. 不正行為に対しては厳正に対処する。不正行為を行った場合、その時点で数学の受験を停止とする。さらに、化学および英語の受験を無効とする。
12. 試験終了後、この問題冊子は持ち帰りなさい。

マーク例

良	不良
●	● ⊗ ●

解答上の注意

解答上の注意は裏表紙に記載してあるので、この問題冊子を裏返して必ず読みなさい。ただし、指示があるまで問題冊子を開いてはならない。

問題 1

- (1) 連立方程式

$$\begin{cases} \log_3(x+y) = 3 \\ \log_3 y - \log_3 x = \frac{1}{\log_{25} 9} \end{cases}$$

の解は $x = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$, $y = \frac{\boxed{\text{ウエ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ である。

- (2) 初項と公差がともに正の実数であるようなどんな等差数列 $\{a_n\}$ に対しても,

$$\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{a_{29}} + \sqrt{a_{30}}} = \frac{\boxed{\text{カキ}}}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_{30}}}$$

が成り立つ。

- (3) $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} < x \leq \pi$ を定義域とする関数 $f(x)$ が

$$f(x) = 8 \cos 2x + 9 \tan^2 x$$

で与えられているとき, $f(x)$ の最小値は $\boxed{*ク}$ であり, その最小値を与える x の値のうち, 最大のものは $\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\pi$ である。

- (4) 1 と異なる正の実数 x に対して,

$$\log_2 x, \log_m x, \log_8 x$$

がこの順に等差数列をなすなら, $m = \boxed{\text{サ}}\sqrt{\boxed{\text{シ}}}$ である。

問題 2

- (1) O を原点とする座標空間に 3 点 $A(-1, 2, 2)$, $B(1, 4, 2)$, $C(0, 4, 3)$ と、もう 1 点 P があり、 x, y を実数として、

$$\vec{OP} = \vec{OA} + x\vec{AB} + y\vec{AC}$$

を満たしている。 \vec{OP} と \vec{AB} が直交しているとき、 x, y は、

$$\boxed{\text{ス}}x + \boxed{\text{セ}}y = -1$$

という関係を満たす。また、 \vec{OP} の長さ $|\vec{OP}|$ が最小になるのは、

$x = \frac{\boxed{*ソ}}{\boxed{\text{タ}}}$, $y = \frac{\boxed{*チ}}{\boxed{\text{ツ}}}$ のときであり、 $|\vec{OP}|$ の最小値は $\frac{\sqrt{\boxed{\text{テ}}}}{\boxed{\text{ト}}}$ である。

- (2) ふたつの関数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$ と $g(x) = x^2 + ax + b$ のグラフが $x = 2$ で接しているとき、 $a = \boxed{*ナ}$, $b = \frac{\boxed{*ニ}}{\boxed{\text{ヌ}}}$ である。また、このとき、ふたつのグラフの共有点の x 座標のうち、 $x = 2$ 以外のものは $\boxed{*ネ}$ である。

問題 3

A を座標平面上の原点, B を (1, 0) に置き, C が第 1 象限にあるような正三角形 ABC がある。三角形 ABC の内部 (辺上を含む) の点 $P(x, y)$ より底辺 AB に至る距離が, 辺 BC, CA に至るそれぞれの距離の相乗平均となるような点 P の軌跡を求めたい。点 P から辺 BC, CA, AB に下した垂線と各辺との交点をそれぞれ D, E, F として, 以下の間に答えよ。

(1) 直線 BC の方程式は $y = -\sqrt{\squareノ} x + \sqrt{\squareハ}$ である。

(2) PD の長さは

$$\frac{-\sqrt{\squareヒ}x - y + \sqrt{\squareフ}}{\squareヘ}$$

である。

(3) 点 P の軌跡は中心 $\left(\frac{\squareホ}{\squareマ}, -\sqrt{\frac{\squareミ}{\squareム}}\right)$, 半径 $\sqrt{\frac{\squareメ}{\squareモ}}$ の円の $y \geq 0$ の部分である。

(4) (3) の円の中心を O とするとき, 四角形 AOBC の内角としての $\angle AOB$ は $\frac{\squareヤ}{\squareユ}\pi$ である。

問題 4

a を実数の定数として、曲線 $C: y = x^3 - ax$ を考える。 C 上の 2 点 P, Q が

「 Q の x 座標は P の x 座標より 1 だけ大きい」

という条件を保ったまま C 上を動くとき、以下の問に答えよ。

- (1) 直線 PQ の傾きが 0 となるような点 P, Q が存在するための a の値の範囲は

$$a \geq \frac{\text{㉝}}{\text{㉞}}$$

- (2) 本問以降では $a = 3$ とする。直線 PQ の傾きの最小値は $\frac{\text{*リル}}{\text{レ}}$ である。

- (3) 直線 PQ と C との P, Q 以外の共有点を R とする。 P の x 座標を p とするとき、 R が P と Q の間 (P, Q を含まない) に位置するための p の取り得る値の範囲は

$$\frac{\text{*ロ}}{\text{ワ}} < p < \frac{\text{*ヲ}}{\text{ン}}$$

である。

- (4) $p = \frac{\text{*ヲ}}{\text{ン}}$ のとき、直線 PQ と C とで囲まれる部分の面積は $\frac{\text{あ}}{\text{いう}}$ である。

問題 5

袋の中に白玉が 15 個入っており，そこに黒玉を 1 つ入れる。黒玉 1 つは 1 時間かけて白玉 1 つを黒玉 1 つに変える反応を起こす。黒く変わった玉も，1 時間かけて同様に白玉 1 つを黒玉 1 つに変える反応を起こす。袋の中の白玉が全て黒玉に変わると反応が止まる。たとえば，白玉が 4 個入っている袋に黒玉を 1 つ入れると，1 時間後には黒玉が 2 つ，その 1 時間後には黒玉が 4 つになり，さらに 1 時間後には全てが黒玉に変わり，反応が止まる。以下の問に答えよ。

- (1) 黒玉を 1 つ入れた後，袋の中が全て黒玉に変わるまでには $\boxed{\text{え}}$ 時間かかる。
- (2) 黒玉を 1 つ入れてから 1 時間後に袋から玉を 1 つ取り出す。取り出した玉が黒玉である確率は $\frac{\boxed{\text{お}}}{\boxed{\text{か}}}$ である。
- (3) 黒玉を 1 つ入れてから 1 時間後に袋から玉を 1 つ取り出す。取り出した玉が白玉ならそれを袋の中に戻し，取り出した玉が黒玉ならそれを袋の中に戻さない。ただし，玉の出し入れにかかる時間は無視する。さらに 1 時間後に袋の中から玉を 1 つ取り出す。取り出した玉が黒玉である確率は $\frac{\boxed{\text{きくけ}}}{\boxed{\text{こさし}}}$ である。
- (4) 黒玉を 1 つ入れてから 2 時間後に袋から玉を 1 つ取り出す。(3) の下線部と同様の操作を行い，さらに 1 時間後に袋の中から玉を 1 つ取り出す。取り出した玉が黒玉である確率は $\frac{\boxed{\text{すせ}}}{\boxed{\text{そた}}}$ である。

解答上の注意

1. 問題の文中 $\boxed{*アイウ}$ などの*にはプラス、マイナスの符号が1つ対応し、ア、イ、あ、い、…などの文字にはそれぞれ0～9の数字が1つずつ対応する。

例1 $\boxed{*アイウ}$ に235と答えるときは、+235としてマークしなさい。

ア	<input checked="" type="radio"/> ⊕ <input type="radio"/> ⊖	<input type="radio"/> 0	<input type="radio"/> 1	<input checked="" type="radio"/> 2	<input type="radio"/> 3	<input type="radio"/> 4	<input type="radio"/> 5	<input type="radio"/> 6	<input type="radio"/> 7	<input type="radio"/> 8	<input type="radio"/> 9
イ		<input type="radio"/> 0	<input type="radio"/> 1	<input type="radio"/> 2	<input checked="" type="radio"/> 3	<input type="radio"/> 4	<input type="radio"/> 5	<input type="radio"/> 6	<input type="radio"/> 7	<input type="radio"/> 8	<input type="radio"/> 9
ウ		<input type="radio"/> 0	<input type="radio"/> 1	<input type="radio"/> 2	<input type="radio"/> 3	<input type="radio"/> 4	<input checked="" type="radio"/> 5	<input type="radio"/> 6	<input type="radio"/> 7	<input type="radio"/> 8	<input type="radio"/> 9

2. 答が0のときは、以下の例に従ってマークしなさい。

問題文中に $\boxed{*エ}$ と $\boxed{エ}$ の2通りの場合がある。

例2.1 $\boxed{*エ}$ に0と答えるときは、+0としてマークしなさい。

エ	<input checked="" type="radio"/> ⊕ <input type="radio"/> ⊖	<input checked="" type="radio"/> 0	<input type="radio"/> 1	<input type="radio"/> 2	<input type="radio"/> 3	<input type="radio"/> 4	<input type="radio"/> 5	<input type="radio"/> 6	<input type="radio"/> 7	<input type="radio"/> 8	<input type="radio"/> 9
---	--	------------------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------

例2.2 $\boxed{エ}$ に0と答えるときは、0のみにマークしなさい。

エ		<input checked="" type="radio"/> 0	<input type="radio"/> 1	<input type="radio"/> 2	<input type="radio"/> 3	<input type="radio"/> 4	<input type="radio"/> 5	<input type="radio"/> 6	<input type="radio"/> 7	<input type="radio"/> 8	<input type="radio"/> 9
---	--	------------------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------

3. 分数形で解答するときは、既約分数(それ以上約分ができない分数)で答えなさい。整数を答えるときは、分母に1をマークしなさい。

例3 $\frac{\boxed{*オ}}{\boxed{カ}}$ に-5と答えるときは、 $\frac{-5}{1}$ であるから、以下のようにマークしなさい。

オ	<input checked="" type="radio"/> ⊕ <input checked="" type="radio"/> ⊖	<input type="radio"/> 0	<input type="radio"/> 1	<input type="radio"/> 2	<input type="radio"/> 3	<input type="radio"/> 4	<input checked="" type="radio"/> 5	<input type="radio"/> 6	<input type="radio"/> 7	<input type="radio"/> 8	<input type="radio"/> 9
カ		<input type="radio"/> 0	<input checked="" type="radio"/> 1	<input type="radio"/> 2	<input type="radio"/> 3	<input type="radio"/> 4	<input type="radio"/> 5	<input type="radio"/> 6	<input type="radio"/> 7	<input type="radio"/> 8	<input type="radio"/> 9

4. 根号を含む形で解答するときは、根号の中の自然数が最小となる形で答えなさい。たとえば、 $\boxed{キ}\sqrt{\boxed{ク}}$ 、 $\frac{\sqrt{\boxed{ケ}}}{\boxed{コ}}$ に $4\sqrt{2}$ 、 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ と答えるところを、 $2\sqrt{8}$ 、 $\frac{\sqrt{8}}{4}$ のように答えてはならない。