

数 学 問 題

(試験時間 12 : 20 ~ 13 : 20)

受験についての注意

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはならない。
 2. この問題冊子は 8 ページある。
 3. 試験中に問題冊子のページの脱落等に気付いた場合は、手をあげて監督者に知らせること。
 4. 解答用紙に受験番号を記入し、マーク欄にマークすること。また、氏名とふりかなを記入すること。
 5. 解答用紙を折り曲げたり、破ったり、汚したりしないこと。
 6. 解答用紙への記入には必ず HB の黒鉛筆またはシャープペンシル (HB, 0.5 mm 芯以上) を用いること。他の筆記用具を用いると、正確に読み取れない場合がある。
 7. 解答にあたっては、解答用紙の該当する箇所を
右に示す例に従ってぬりつぶすこと。
例えば 2 にマークするときは、次のように
①●③とする。
- | | |
|---|-------|
| 良 | 不良 |
| ● | ● ⊗ ● |
8. 一度記入したマークを消す場合には、消しゴムできれいに消すこと。
×をつけても消したことはない。また消しゴムのくずを完全に取り除いておくこと。
 9. 計算には問題冊子の余白あるいは別に配布する計算用紙 (白紙) を使用すること。
 10. 解答用紙の指定された場所以外には何も書いてはならない。
 11. 選択問題 **4** と **5** はどちらか一方を選択してマーク欄にマークし、選択した方の問題を解答すること。(マーク欄にマークがない場合は採点されない)
 12. 辞書機能、計算機能をもつものを使用してはならない。
 13. 携帯電話の電源は切っておくこと。身につけたり机上に置いたりしてはならない。
 14. この問題冊子は試験終了後持ち帰ること。

解答上の注意

解答上の注意は裏表紙に記載してあるので、この問題冊子を裏返して必ず読みなさい。ただし、指示があるまで問題冊子を開いてはならない。

① 以下の空欄 [ア] ~ [コ] に入る数字をそれぞれ解答欄にマークしなさい。

問 1. $a = \frac{3+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$, $b = \frac{3-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$ のとき,

$$ab = \boxed{\text{ア}}$$

$$a + b = \boxed{\text{イ}}$$

$$a^2 + b^2 = \boxed{\text{ウエ}}$$

$$\frac{a^4 - b^4}{a^4 + b^4} = -\frac{\boxed{\text{オ}}\sqrt{\boxed{\text{カ}}}}{\boxed{\text{キ}}}$$

問 2. 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4 の 10 個の数字がある. この中の 3 個を用いてできる 3 桁の整数は全部で $\boxed{\text{クケ}}$ 個ある.

問 3. $0 \leq x < 2\pi$ の範囲で $\cos(\pi \cos x) = \frac{1}{2}$ を満たす x は, 全部で $\boxed{\text{コ}}$ 個ある.

2 以下の空欄 ア ~ ス に入る数字をそれぞれ解答欄にマークしなさい。

問1. 座標平面上に直線 $l_1: y = x + 12$ および $l_2: y = -2x + 24$ と、

放物線 $C: y = x^2$ がある。

いま l_1 と l_2 の交点の x 座標を a とすると $a = \text{ア}$ であり、 l_1 と C の交点の x 座標を小さい順に b, c とすると $b = -\text{イ}$, $c = \text{ウ}$ であり、 l_2 と C の交点の x 座標を小さい順に d, e とすると $d = -\text{エ}$, $e = \text{オ}$ である。

また $d \leq x \leq a$ の範囲で l_1 と l_2 と C で囲まれる部分の面積は $\frac{\text{カキク}}{\text{ケ}}$ である。

問2. ある放射性物質は一定の割合で崩壊し、12.7年たつと最初の量の半分になるという。この放射性物質が初めて現在の量の1%以下になるのは コサ 年後である。ただし $\log_{10} 2 = 0.301$ とする。

問3. 実数 x, y が $x^3 + y^3 = 3xy$ を満たすとき、 $x + y$ の取り得る値の範囲は、 $-\text{シ} < x + y \leq \text{ス}$ である。

3 座標空間内の5点を $A(1, 1, 1)$, $B(-1, 2, 2)$, $C(0, 1, 3)$, $D(2, 0, 2)$, $E(3, 3, 2)$ とする. 以下の空欄 $\boxed{\text{ア}}$ ~ $\boxed{\text{ソ}}$ に入る数字をそれぞれ解答欄にマークしなさい.

問1. $\overrightarrow{AB} = (-\boxed{\text{ア}}, \boxed{\text{イ}}, \boxed{\text{ウ}})$, $\overrightarrow{DC} = (-\boxed{\text{エ}}, \boxed{\text{オ}}, \boxed{\text{カ}})$ である.

問2. \overrightarrow{AB} と \overrightarrow{AD} のなす角を θ とすると, $\sin \theta = \frac{\sqrt{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{ク}}}$ である.

問3. \overrightarrow{AB} と \overrightarrow{AD} のいずれにも垂直な単位ベクトルは, $\pm \frac{1}{\sqrt{\boxed{\text{ケコ}}}} (\boxed{\text{サ}}, \boxed{\text{シ}}, 1)$ である.

問4. 五面体 ABCDE の体積は, $\frac{\boxed{\text{スセ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ である.

選択問題 (4 か 5 の, いずれか1問を選んで解答しなさい. 解答用紙に選んだ問題の番号をマークしなさい.)

4 以下の空欄 ア, イ, オ に入る数字をそれぞれ解答欄にマークし, 空欄 ウ, エ に入る選択肢の番号を解答欄にマークしなさい.

辺の長さが2と3の長方形のタイル T がある. このタイル n 枚を隙間なく並べて長方形または正方形 (以下, 単に長方形と記載する) を作る時, その面積は $6n$ である.

逆に, 面積が $6n$ で辺の長さが整数の長方形 R の枠を作り, その枠内に上記のタイル T を敷き詰める場合を考える. いま自然数 n に対して $ab = 6n$ を満たす2以上のどんな整数 a, b に対しても, 辺の長さが a と b の長方形 R は n 枚のタイル T で隙間なく敷き詰めることができることを証明しよう.

$ab = 6n$ より, 次の2通りの場合が考えられる.

- (1) a, b のうち, 一方が2で割り切れ, 他方が3で割り切れる.
- (2) a, b のうち, 一方が ア で割り切れ, 他方が2でも3でも割り切れない.

(1) の場合:

2で割り切れる方を a としても一般性を失わない. このとき, 長方形 R の長さ a の辺に, タイル T の長さ イ の辺が接するように ウ 枚並べる (1回目). 次にこのタイルの列に, さらにタイル T を長さ イ の辺が接するように ウ 枚並べる (2回目). これを エ 回目まで行くと, 長方形 R 内に n 枚のタイル T を隙間なく敷き詰めることができる.

(2) の場合:

ア で割り切れる方を a としても一般性を失わない. このとき, ある正の整数 m を用いて

$$b = \text{オ} m + 3$$

と表すことができ, 長方形 R を, 辺の長さが a と オ m の長方形 R_1 と, 辺の長さが a と3の長方形 R_2 に分けることができる.

このとき, R_1 と R_2 はいずれも (1) の条件を満たすので, タイル T を隙間なく敷き詰めることができる.

- ウ と エ の選択肢: ① $\frac{a}{2}$ ② $\frac{a}{3}$ ③ $\frac{3a}{2}$ ④ $\frac{2a}{3}$
⑤ $\frac{b}{2}$ ⑥ $\frac{b}{3}$ ⑦ $\frac{3b}{2}$ ⑧ $\frac{2b}{3}$

- 5 以下の空欄 $\boxed{\text{ア}}$, $\boxed{\text{イ}}$, $\boxed{\text{オ}}$ に入る選択肢の番号を解答欄にマークし, 空欄 $\boxed{\text{ウ}}$, $\boxed{\text{エ}}$, $\boxed{\text{カ}}$ に入る数字をそれぞれ解答欄にマークしなさい. ただし積分定数を C とする.

問 1. $f(x) = \log(\sqrt{x^2+1})$ のとき, $f'(x) = \boxed{\text{ア}}$ である.

- $\boxed{\text{ア}}$ の選択肢: ① $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ ② $\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}$ ③ $\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$
 ④ $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ ⑤ $\sqrt{x^2+1}$ ⑥ $\frac{1}{2(x^2+1)}$
 ⑦ $\frac{x}{x^2+1}$ ⑧ $\frac{2x}{x^2+1}$

問 2. $\cos^3 x = \cos x - \cos x \sin^2 x$ より, $\int \cos^3 x \, dx = \boxed{\text{イ}} + C$ である.

- $\boxed{\text{イ}}$ の選択肢: ① $\frac{1}{4} \cos^4 x$ ② $\frac{1}{4} \sin^4 x$ ③ $\frac{1}{4} \cos^4 x \sin x$
 ④ $-\frac{1}{4} \cos^4 x \sin x$ ⑤ $-3 \cos^2 x \sin x$ ⑥ $\sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x$
 ⑦ $\frac{1}{3} \cos^3 x - \cos x$

問 3. $\frac{x+5}{x^2+4x+3} = \frac{\boxed{\text{ウ}}}{x+1} - \frac{\boxed{\text{エ}}}{x+3}$ より, $\int \frac{x+5}{x^2+4x+3} \, dx = \boxed{\text{オ}} + C$ である.

- $\boxed{\text{オ}}$ の選択肢: ① $\log |2(x+1)(x+3)|$ ② $\log (x+1)^2 |x+3|$
 ③ $\log \frac{2|x+1|}{|x+3|}$ ④ $\log \frac{(x+1)^2}{|x+3|}$ ⑤ $\log \frac{|x+1|}{2|x+3|}$
 ⑥ $\log \frac{|x+1|}{(x+3)^2}$

問 4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{5x} = \boxed{\text{カ}}$

解答上の注意

1. 分数形で解答するときは、既約分数（それ以上約分ができない分数）で答えなさい。

たとえば、 $\frac{3}{4}$ と答えるところを、 $\frac{6}{8}$ のように答えてはならない。

2. 根号を含む形で解答するときは、根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。

たとえば、 $\boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イ}}}$ 、 $\frac{\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}}{\boxed{\text{エ}}}$ に $4\sqrt{2}$ 、 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ と答えるところを、 $2\sqrt{8}$ 、 $\frac{\sqrt{8}}{4}$ のように答えてはならない。

3. たとえば、 $-\boxed{\text{オ}}x^2 + \boxed{\text{カ}}$ に $-x^2 + 3$ と答えるときは、 $\boxed{\text{オ}}$ に 1 を $\boxed{\text{カ}}$ に 3 をマークし

なさい。また $x^{\boxed{\text{キ}}} - \boxed{\text{ク}}$ に $x - 3$ と答えるときは、 $\boxed{\text{キ}}$ に 1 を $\boxed{\text{ク}}$ に 3 をマークしなさい。

また $\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\pi$ に $\frac{\pi}{3}$ と答えるときは、 $\boxed{\text{ケ}}$ に 1 を $\boxed{\text{コ}}$ に 3 をマークしなさい。