

数 学 問 題

(この問題は5題からなっている)

受験についての注意

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはならない。
2. 解答用紙への記入には、必ず**HBの黒鉛筆**を使用しなさい。
3. 解答用紙を折り曲げたり、破いたり、汚したりしてはならない。採点が不可能になる。
4. 合図があったら、解答用紙の左上部の空欄に**受験番号**を記入しなさい。
5. 試験中にページの脱落等に気づいた場合は、手をあげて監督者に知らせなさい。解答用紙の汚れ等に気づいた場合も、同様に知らせなさい。
6. 解答は解答用紙の指定された場所に記入し、その他の部分には何も書いてはならない。裏面にも何も書いてはならない。
7. 解答にあたっては、マークすることを要求された欄をマーク例に従ってぬりつぶしなさい。
8. 一度記入したマークを消す場合には、消しゴムできれいに消さねばならない。×をつけても消したことはない。
9. 計算や下書きは、問題冊子の余白を利用しなさい。
10. 計算機を使用してはならない。また、**携帯電話やスマートフォンなどの通信機器は、必ず電源を切って鞆の中にしまいなさい。**
11. 不正行為に対しては厳正に対処する。不正行為を行った場合、その時点で数学の受験を停止とする。さらに、化学および英語の受験を無効とする。
12. 試験終了後、この問題冊子は持ち帰りなさい。

マーク例

良	不良
●	● ○ ○

解答上の注意

解答上の注意は裏表紙に記載してあるので、この問題冊子を裏返して必ず読みなさい。ただし、指示があるまで問題冊子を開いてはならない。

問題 1

- (1) a, b を 0 でない相異なる実数とする。2 次方程式 $x^2 + ax + b = 0$ が a, b を解にもつとき、 $a = \boxed{\text{*ア}}$, $b = \boxed{\text{*イ}}$ である。

- (2) 円 $x^2 + y^2 + 2y = 0$ に点 $(\sqrt{3}, 0)$ から引いた接線のうち、傾きが正のものの方方程式は、 $y = \sqrt{\boxed{\text{ウ}}} x + \boxed{\text{*エ}}$ である。

- (3) 不等式

$$\frac{1}{\log_9 2} + \frac{1}{\log_7 2} < n$$

を満たす整数 n の最小値は $\boxed{\text{オ}}$ である。

- (4) $0 < a < 1$ のとき、不等式

$$a^{2x-2} - a^{x+3} - a^{x-4} + a \leq 0$$

の解は $\boxed{\text{*カ}} \leq x \leq \boxed{\text{*キ}}$ である。

問題 2

(1) $0 \leq x < y \leq 2\pi$ として, 連立方程式

$$\begin{cases} \tan x + \tan y = 2 & \dots\dots ① \\ 2 \cos x \cos y = -1 & \dots\dots ② \end{cases}$$

を解こう。tan の定義に基づいて①の左辺を通分し, ②を用いると,

$$\sin(x+y) = \boxed{*ク}$$

となる。ここから $x+y$ の値の候補がわかる。次に, ②の左辺を和の形に書き直すと,

$$\cos(x-y) = \boxed{*ケ}$$

が得られ, $x-y$ の値がわかる。以上より, 唯一の解

$$x = \frac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}\pi, \quad y = \frac{\boxed{シ}}{\boxed{ス}}\pi$$

が求められる。

(2) 1 から 10 までの自然数の集合 $X = \{1, 2, \dots, 10\}$ を考える。以下の間に答えよ。

(i) $\sum_{k=1}^{10} k^2 = \boxed{\text{セソタ}}$ である。

(ii) X 中の隣接する 2 数の積の和 $\sum_{k=1}^9 k(k+1) = \boxed{\text{チツテ}}$ である。

(iii) (i), (ii) を踏まえて $(1+2+\dots+10)^2$ の展開を考えることによって, X 中の隣接しない異なる 2 数の積の和 S を求めると, $S = \boxed{\text{トナニ}}$ となる。隣接しない異なる 2 数とは, 差の絶対値が 2 以上の 2 数のことである。 S を作る際は, (ii) と同様に (小さい数) \times (大きい数) の形の積だけをカウントするものとする。

問題 3

$0 \leq x \leq 1$ として, x の関数

$$f(x) = \int_0^1 |t^2 - xt| dt$$

を考える。以下の問に答えよ。

(1) $0 < x < 1$ のとき, t の関数 $g(t) = |t^2 - xt|$ の極大値は $\frac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}} x^2$ である。

(2) (1) で考えた極大点において $g(t)$ のグラフに接線を引く。この接線が $g(t)$ のグラフと再び交わる点の t 座標のうち, 最大のものは $\frac{\boxed{\text{ノ}} + \sqrt{\boxed{\text{ハ}}}}{\boxed{\text{ヒ}}} x$ である。

(3) $f(x) = \frac{\boxed{\text{フ}}}{\boxed{\text{ヘ}}} x^3 - \frac{\boxed{\text{ホ}}}{\boxed{\text{マ}}} x + \frac{\boxed{\text{ミ}}}{\boxed{\text{ム}}}$ である。

(4) $f(x)$ の最小値は $\frac{\boxed{\text{ケ}} - \sqrt{\boxed{\text{モ}}}}{\boxed{\text{ヤ}}}$ であり, 最大値は $\frac{\boxed{\text{ユ}}}{\boxed{\text{ヨ}}}$ である。

問題 4

7枚のカードにそれぞれ2, 3, 4, 5, 6, 7, 8の数字が書き込まれている。このカードから1枚ずつ3枚のカードを無作為に取り、取った順に左から並べて3桁の整数を作る。以下の間に答えよ。

(1) できた整数が偶数になる場合の数は $\boxed{\text{ラリル}}$ 通りである。

(2) できた整数が自然数の2乗になっている場合の数は $\boxed{\text{レ}}$ 通りである。

(3) できた整数が3で割り切れる確率は $\frac{\boxed{\text{ロワ}}}{\boxed{\text{ラン}}}$ である。

問題 5

座標空間に、原点 O を中心とする半径 1 の球 S を考え、 S 上に 2 点 $A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $B\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ をとる。以下の間に答えよ。ただし、以下で円周上の弧の長さとは、常に短い方を意味するものとする。

(1) 2 点 A, B を通って xy 平面に平行な平面で S を切ったときの切り口に現れる円を C_1 とする。 C_1 の半径は $\sqrt{\frac{\text{あ}}{\text{い}}}$ であり、 C_1 上で測った弧 \widehat{AB} の長さは $\sqrt{\frac{\text{う}}{\text{え}}}\pi$ である。

(2) 内積 $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$ を計算することによって、 $\angle AOB = \frac{\text{お}}{\text{か}}\pi$ と求められる。

(3) 3 点 O, A, B を通る平面で S を切ったときの切り口に現れる円を C_2 とする。 C_2 上で測った弧 \widehat{AB} の長さは $\frac{\text{き}}{\text{く}}\pi$ である。

(4) (1) の円 C_1 の中心を O' とする。 O' から、3 点 O, A, B を通る平面に下ろした垂線の長さは $\sqrt{\frac{\text{け}}{\text{こ}}}$ である。

解答上の注意

1. 問題の文中 ***アイウ** などの*にはプラス、マイナスの符号が1つ対応し、ア、イ、あ、い、…などの文字にはそれぞれ0～9の数字が1つずつ対応する。

例1 ***アイウ** に235と答えるときは、+235としてマークしなさい。

ア	⊕ ⊖	① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨
イ		① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨
ウ		① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

2. 答が0のときは、以下の例に従ってマークしなさい。

問題文中に ***エ** と **エ** の2通りの場合がある。

例2.1 ***エ** に0と答えるときは、+0としてマークしなさい。

エ	⊕ ⊖	① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨
---	-----	-------------------

例2.2 **エ** に0と答えるときは、0のみにマークしなさい。

エ		① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨
---	--	-------------------

3. 分数形で解答するときは、既約分数(それ以上約分ができない分数)で答えなさい。整数を答えるときは、分母に1をマークしなさい。

例3 ***オ** に-5と答えるときは、 $\frac{-5}{1}$ であるから、以下のようにマークしなさい。

オ	⊕ ⊖	① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨
カ		① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

4. 根号を含む形で解答するときは、根号の中の自然数が最小となる形で答えなさい。たとえば、 $\sqrt{\text{キ}}$ 、 $\sqrt{\frac{\text{ケ}}{\text{ク}}}$ に $4\sqrt{2}$ 、 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ と答えるところを、 $2\sqrt{8}$ 、 $\frac{\sqrt{8}}{4}$ のように答えてはならない。