

# 数 学 問 題

(この問題は5題からなっている)

## 受験についての注意

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはならない。
2. 試験中に問題冊子のページの脱落等に気づいた場合は、手をあげて監督者に知らせなさい。
3. 解答用紙の記入には、必ず**HBの黒鉛筆**または**シャープペンシル(HB, 0.5 mm 芯以上)**を用いること。
4. 解答用紙を折り曲げたり、破いたり、汚したりしないこと。
5. 合図があったら**解答用紙に受験番号**を記入し、マーク欄に**マーク**すること。また、**氏名とふりがな**を記入すること。
6. 解答用紙の該当する箇所を**マーク例**に従ってぬりつぶしなさい。一度記入したマークを消す場合は、消しゴムできれいに消しなさい。  
×をつけても消したことはない。
7. 解答用紙の指定された場所以外には何も書いてはならない。
8. 計算や下書きは、問題冊子の余白を利用しなさい。
9. 計算機を使用してはならない。また、**携帯電話やスマートフォンなどの通信機器は必ず電源を切り、鞆の中にしまいなさい。**
10. 不正行為には厳正に対処する。不正行為を行った場合は、その時点で受験を停止とする。
11. 試験終了後、この問題冊子を持ち帰りなさい。

マーク例

良	不良
●	● <del>×</del> ●

### 解答上の注意

解答上の注意を裏表紙に記載してあるので、この問題冊子を裏返して読みなさい。  
ただし、指示があるまで問題冊子を開いてはならない。

問題 1

- (1)  $r$  を自然数とする。円  $(x-2)^2 + (y-1)^2 = r^2$  が  $x$  軸から切り取る線分 (両端を含める) の中に、 $x$  座標が整数であるような点がちょうど 5 個だけあるような  $r$  の値は  $\boxed{\text{ア}}$  である。

- (2)  $0 \leq \theta < 2\pi$  とする。不等式

$$7 \cos 2\theta - 46 \cos \theta + 19 \leq 0$$

が成り立つとき、 $\sin \theta$  の最大値は  $\frac{\boxed{\text{イ}}\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}}{\boxed{\text{エ}}}$  である。

- (3) 初項が  $-18$  であるような等差数列  $\{a_n\}$  の初項から第  $n$  項までの和を  $S_n$  で表す。 $S_4 = S_9$  が成立するとき、 $S_n = 0$  となるような  $n$  の値は  $\boxed{\text{オカ}}$  である。

- (4) 連立方程式

$$\begin{cases} \log_{xy}(x-y) = 1 \\ \log_{xy}(x+y) = 0 \end{cases}$$

の解は  $x = \frac{-\boxed{\text{キ}} + \sqrt{\boxed{\text{ク}}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ ,  $y = \frac{\boxed{\text{コ}} - \sqrt{\boxed{\text{サ}}}}{\boxed{\text{シ}}}$  である。



問題 2

(1)  $x + y = 24$  を満たしている互いに素な正の整数  $x, y$  の組  $(x, y)$  は全部で ス 組ある。分母と分子の和が 1000 であるような既約分数（これ以上約分できない分数）のうち、0.2 より大きく 0.25 より小さいものは全部で セソ 個ある。

(2) 原点を出発し、数直線上の正の部分に動く点 P がある。P は、ひとつのサイコロを振り、1 または 2 の目が出たら正の向きに 3 だけ進み、それ以外の目が出たら正の向きに 1 だけ進む。サイコロを 2 回振って P の座標が 2 である確率は  $\frac{\text{タ}}{\text{チ}}$ 、サイコロを 3 回振って P の座標が 7 である確率は  $\frac{\text{ツ}}{\text{テ}}$  である。



### 問題 3

座標平面上に放物線  $C : y = x^2$  と直線  $l : y = ax$  がある。  $a$  は正の実数である。また、 $l$  と平行で  $C$  と接する直線を  $m$  とし、  $l$  と  $m$  の距離を  $d$  とする。以下の各問に答えよ。

(1)  $m$  の方程式は

$$y = ax - \frac{a \boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$$

である。

(2)  $d$  を  $a$  の式で表すと

$$d = \frac{a^2}{\boxed{\text{ニ}} \sqrt{a^2 + \boxed{\text{ヌ}}}}$$

となる。

(3)  $C$  と  $m$ 、および 2 直線  $x = 0, x = a$  で囲まれた部分の面積を  $S$  とすると、

$$S = \frac{a \boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノハ}}}$$

である。

(4) (3) の  $S$  について、  $\frac{S}{d^2}$  の値が最小になるのは  $a = \boxed{\text{ヒ}}$  のときで、その最小値は

$\frac{\boxed{\text{フ}}}{\boxed{\text{ヘ}}}$  である。



問題 4

$x$  を実数とする。座標平面上の原点  $O$  を中心とする半径 1 の円周上に 3 点  $A, B, C$  があり、

$$3\vec{OA} + 4\vec{OB} + (x+2)\vec{OC} = \vec{0}$$

を満たしている。ただし、 $A, B, C$  は異なるとは限らない。以下の問に答えよ。

(1)  $\vec{OA}, \vec{OB}$  の向きが同じであるとき、 $x = -\boxed{\text{ホ}}, \boxed{\text{マ}}$  である。

(2) 内積  $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$  を  $x$  の式で表すと、

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \frac{\boxed{\text{ミ}}}{\boxed{\text{ムメ}}}(x^2 + \boxed{\text{モ}}x - \boxed{\text{ヤユ}})$$

である。

(3)  $x > 0$  で  $\vec{OA} \perp \vec{OB}$  のとき、

$$\vec{OA} \cdot \vec{OC} = \frac{\boxed{*ヨ}}{\boxed{\text{ラ}}}, \quad \vec{OB} \cdot \vec{OC} = \frac{\boxed{*リ}}{\boxed{\text{ル}}}$$

である。

(4) (3) のとき、 $\triangle ABC$  の面積は  $\frac{\boxed{\text{レ}}}{\boxed{\text{ロ}}}$  である。



問題 5

$x$  の関数  $f(x) = 8^x - 7 \cdot 4^x + 2^{x+3}$  を考える。以下の各問に答えよ。

- (1)  $t = 2^x$  とおいて  $f(x)$  を  $t$  の関数として表すと

$$\boxed{\text{ワ}} t^3 - \boxed{\text{ヲ}} t^2 + \boxed{\text{ン}} t$$

となる。

- (2)  $x$  の方程式  $f(x) = -16$  を解くと、 $x = \boxed{\text{あ}}$  である。

- (3)  $k$  を実数の定数として、方程式  $f(x) = k$  が異なる 3 つの実数解をもつための  $k$  のとり得る値の範囲は

$$\boxed{\text{い}} < k < \frac{\boxed{\text{うえ}}}{\boxed{\text{おか}}}$$

である。

- (4) (3) の 3 つの実数解のうち、最も小さいものを  $\alpha$  とするとき、 $\alpha$  がとり得る値の範囲は

$$\alpha < \boxed{\text{き}} - \log_2 \boxed{\text{く}}$$

である。ただし、 $\boxed{\text{き}}$  と  $\boxed{\text{く}}$  の最大公約数は 1 であるものとする。



### 解答上の注意

1. 問題の文中  $\boxed{*アイウ}$  などの\*にはプラス、マイナスの符号が1つ対応し、ア、イ、あ、い、…などの文字にはそれぞれ0～9の数字が1つずつ対応する。

例1  $\boxed{*アイウ}$  に235と答えるときは、+235としてマークしなさい。

ア	<input checked="" type="radio"/> <input type="radio"/>	<input type="radio"/> 0	<input type="radio"/> 1	<input checked="" type="radio"/> 2	<input type="radio"/> 3	<input type="radio"/> 4	<input type="radio"/> 5	<input type="radio"/> 6	<input type="radio"/> 7	<input type="radio"/> 8	<input type="radio"/> 9
イ		<input type="radio"/> 0	<input type="radio"/> 1	<input type="radio"/> 2	<input checked="" type="radio"/> 3	<input type="radio"/> 4	<input type="radio"/> 5	<input type="radio"/> 6	<input type="radio"/> 7	<input type="radio"/> 8	<input type="radio"/> 9
ウ		<input type="radio"/> 0	<input type="radio"/> 1	<input type="radio"/> 2	<input type="radio"/> 3	<input type="radio"/> 4	<input checked="" type="radio"/> 5	<input type="radio"/> 6	<input type="radio"/> 7	<input type="radio"/> 8	<input type="radio"/> 9

2. 答が0のときは、以下の例に従ってマークしなさい。

問題文中に  $\boxed{*エ}$  と  $\boxed{エ}$  の2通りの場合がある。

例2.1  $\boxed{*エ}$  に0と答えるときは、+0としてマークしなさい。

エ	<input checked="" type="radio"/> <input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/> 0	<input type="radio"/> 1	<input type="radio"/> 2	<input type="radio"/> 3	<input type="radio"/> 4	<input type="radio"/> 5	<input type="radio"/> 6	<input type="radio"/> 7	<input type="radio"/> 8	<input type="radio"/> 9
---	--	------------------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------

例2.2  $\boxed{エ}$  に0と答えるときは、0のみにマークしなさい。

エ		<input checked="" type="radio"/> 0	<input type="radio"/> 1	<input type="radio"/> 2	<input type="radio"/> 3	<input type="radio"/> 4	<input type="radio"/> 5	<input type="radio"/> 6	<input type="radio"/> 7	<input type="radio"/> 8	<input type="radio"/> 9
---	--	------------------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------

3. 分数形で解答するときは、既約分数(それ以上約分ができない分数)で答えなさい。整数を答えるときは、分母に1をマークしなさい。

例3  $\boxed{*オ}$  に-5と答えるときは、 $\frac{-5}{1}$ であるから、以下のようにマークしなさい。

オ	<input checked="" type="radio"/> <input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/> 0	<input type="radio"/> 1	<input type="radio"/> 2	<input type="radio"/> 3	<input type="radio"/> 4	<input checked="" type="radio"/> 5	<input type="radio"/> 6	<input type="radio"/> 7	<input type="radio"/> 8	<input type="radio"/> 9
カ		<input type="radio"/> 0	<input checked="" type="radio"/> 1	<input type="radio"/> 2	<input type="radio"/> 3	<input type="radio"/> 4	<input type="radio"/> 5	<input type="radio"/> 6	<input type="radio"/> 7	<input type="radio"/> 8	<input type="radio"/> 9

4. 根号を含む形で解答するときは、根号の中の自然数が最小となる形で答えなさい。たとえば、 $\boxed{キ}\sqrt{\boxed{ク}}$ 、 $\sqrt{\frac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}}$  に  $4\sqrt{2}$ 、 $\frac{\sqrt{2}}{2}$  と答えるところを、 $2\sqrt{8}$ 、 $\frac{\sqrt{8}}{4}$  のように答えてはならない。